Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2016

1. *Вычислить определитель n-го порядка, все элементы главной диагонали которого равны 3, а все остальные элементы равны 2.*

Решение. Такой определитель имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к каждому из столбцов с номерами 1, 2, …, $n-1$ последний столбец, умноженный на (-1), а затем к последней строке прибавим последовательно 1-ю, 2-ю, и т.д., $n-1$-ю строки. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3+2\cdot(n-1) \end{vmatrix} = 2n+1.$$

2. *Найти многочлен $P(x)$ наименьшей степени, имеющий в точке $x=1$ локальный максимум, равный 6, и в точке $x=3$ локальный минимум, равный 2.*

Решение. Так как многочлен $P(x)$ имеет как минимум две точки экстремума, то его производная $P'(x)$ имеет, по крайней мере, два нуля, а, следовательно, является многочленом степени не ниже 2. Поэтому наименьшая возможная степень $P(x)$ равна 3. Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, тогда $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Так как, по условию задачи, $P'(1) = P'(3) = 0,\ P(1) = 6,\ P(3) = 2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0, \\ 27a + 6b + c = 0, \\ a + b + c + d = 6, \\ 27a + 9b + 3c + d = 2, \end{cases}$$

решением которой является $a = 1,\ b = -6,\ c = 9,\ d = 2$. Таким образом,

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2.$$

3. *Найти прямую, проходящую через точку* $A(3;2)$, *отсекающую положительные отрезки на осях координат и образующую вместе с ними треугольник наименьшей площади.*

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;2)$ и отсекающей положительные отрезки на осях координат, имеет вид

$$y-2=k(x-3),\ k<0.$$

Если $x=0$, то $y=2-3k$, а если $y=0$, то $x=\dfrac{3k-2}{k}$. Следовательно, площадь треугольника, образованного данной прямой и осями координат, определяется формулой

$$S=S(k)=\frac{1}{2}(2-3k)\cdot\frac{3k-2}{k}=-\frac{9}{2}k+6-\frac{2}{k}$$

и представляет собой функцию переменной k. Решив уравнение

$$S'(k)=-\frac{9k^2-4}{2k^2}=-\frac{(3k-2)(3k+2)}{2k^2}=0,$$

найдем $k=-\dfrac{2}{3}$ ($k=\dfrac{2}{3}$ не удовлетворяет условию задачи). Так как

$$S'(k)<0 \text{ при } k<-\frac{2}{3} \text{ и } S'(k)>0 \text{ при } -\frac{2}{3}<k<0,$$

то при $k=-\dfrac{2}{3}$ значение площади треугольника будет наименьшим. Значит, уравнение искомой прямой $y-2=-\dfrac{2}{3}(x-3)$, или $y=-\dfrac{2}{3}x+4$.

4. *При каких значениях* a *для любого числа* b *найдется хотя бы одно число* c *такое, что система уравнений*

$$\begin{cases} x+2by=a, \\ bx+(1-b)y=c^2+ac \end{cases} \qquad (1)$$

имеет решение?

Решение. По теореме Кронекера-Капелли, система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2b \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

равен рангу ее расширенной матрицы

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2b & a \\ b & 1-b & c^2+ac \end{array}\right].$$

Если определитель системы не равен нулю:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2b \\ b & 1-b \end{vmatrix}=1-b-2b^2\neq 0 \iff b\neq -1, b\neq 0,5,$$

то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\left[A \mid B\right] = 2$, и система (1) имеет единственное решение при любых значениях a и c.

Пусть $\Delta = 0$ (при $b = -1$ или $b = 0{,}5$), тогда $\operatorname{rang} A = 1$.

При $b = -1$ имеем

$$\left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ -1 & 2 & c^2 + ac \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & c^2 + ac + a \end{array}\right],$$

и $\operatorname{rang}\left[A \mid B\right] = 1 \Leftrightarrow c^2 + ac + a = 0$.

При $b = 0{,}5$ имеем

$$\left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0{,}5 & 0{,}5 & c^2 + ac \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2c^2 + 2ac - a \end{array}\right],$$

и $\operatorname{rang}\left[A \mid B\right] = 1 \Leftrightarrow 2c^2 + 2ac - a = 0$.

Таким образом, нас интересуют такие, и только такие значения a, при которых система квадратных уравнений

$$\begin{cases} c^2 + ac + a = 0, \\ 2c^2 + 2ac - a = 0 \end{cases}$$

имеет решения относительно неизвестной c. Эти значения найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases} a^2 - 4a \ge 0, \\ 4a^2 + 8a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -2\right] \cup \left\{0\right\} \cup \left[4; +\infty\right).$$

5. *Доказать, что функция* $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ *дифференцируема при всех* x.

Решение.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \cdot e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функция дифференцируема при всех $x > 0$ и при всех $x < 0$. Докажем, что функция дифференцируема в точке $x = 0$. Для этого достаточно доказать равенство

$$f'\left(+0\right) = f'\left(-0\right).$$

Но

$$f'\left(+0\right) = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} \frac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{-2x^{-3}}{-x^{-2} \cdot e^{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{2x^{-1}}{e^{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{-2x^{-2}}{-x^{-2} \cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to +0} \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Для вычисления предела мы дважды воспользовались правилом Лопиталя. Так как, очевидно, $f'\left(-0\right) = 0$, то функция $f\left(x\right)$ дифференцируема в точке $x = 0$, а, следовательно, дифференцируема при всех x.

6. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$, *где* $a>0,\ \ b>0$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^{1/x}+b^{1/x}-2}}\right)^{\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\cdot x}=(*).$$

Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\cdot x=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\left(a^{1/x}-1\right)+\left(b^{1/x}-1\right)}{1/x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{a^{1/x}-1}{1/x}+\lim_{x\to\infty}\frac{b^{1/x}-1}{1/x}\right)=\left[\begin{array}{l}a^{1/x}-1\sim\dfrac{1}{x}\ln a,\ x\to\infty\\ b^{1/x}-1\sim\dfrac{1}{x}\ln b,\ x\to\infty\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln a+\ln b\right)=\frac{1}{2}\ln ab=\ln\sqrt{ab}.$$

Следовательно,

$$(*)=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

7. *Найти количество корней уравнения* $e^x=ax^2$ *в зависимости от значения параметра* a.

Решение. Исходя из вида графиков функций $y=e^x$ и $y=ax^2$ очевидно, что при $a\le 0$ уравнение не имеет корней. При любых $a>0$ уравнение имеет один отрицательный корень. Найдем количество положительных корней уравнения. Для этого рассмотрим равносильное ему при $a>0,\ x>0$ уравнение

$$x=\ln\left(ax^2\right)\ \Leftrightarrow\ x-\ln a-2\ln x=0. \qquad (2)$$

Корни уравнения (2) являются нулями функции $f(x)=x-\ln a-2\ln x$, определенной и непрерывной на $(0;+\infty)$. Так как

$$f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x},$$

то функция $f(x)$ убывает при $x<2$ и возрастает при $x>2$, $x_0=2$ − точка минимума функции и

$$f(2)=2-\ln a-2\ln 2=\ln\frac{e^2}{4}-\ln a.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $f(2)>0 \Leftrightarrow a<\dfrac{e^2}{4}$: функция положительна при всех $x>0$ и не имеет нулей;

2. $f(2)=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{e^2}{4}$: функция имеет единственный ноль $x=2$;

3. $f(2)<0 \Leftrightarrow a>\dfrac{e^2}{4}$: так как $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, то, в силу непрерывности, функция $f(x)$ имеет ровно два нуля $0<x_1<2<x_2$.

Таким образом, исходное уравнение не имеет корней при $a\le 0$, имеет один корень при $0<a<\dfrac{e^2}{4}$, два корня при $a=\dfrac{e^2}{4}$ и три корня при $a>\dfrac{e^2}{4}$.